

ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕССТЕРДІ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ КУРСЫ

Бұл курс ҚҰУ - нің физика-техникалық факультетінің студенттеріне арналған. Лектор - Хасанов Манас Кабылтайевич.

Тел: +7 (707) 612 66 92
Почта: manas_hasanov@mail.ru

II-бөлім

САНДЫҚ ӘДІСТЕР

§5. Функцияны аппроксимациялау.

Жалпы түсінік.

Математикалық талдауда $f(x)$ функциясын аппроксимациялау деп осы функцияға жақын және «белгілі» аналитикалық немесе есептеу амалдарын орындауды жеңілдететіндей «жақсы» қасиеттері бар басқа $\varphi(x)$ функциямен алмастыруды айтады. Яғни қысқаша айтатын болсақ

$$f(x) \approx \varphi(x)$$

болатындай $\varphi(x)$ функциясын табу.

Егер $f(x)$ функциясы тек $[a, b]$ аралығы ішінде ізделсе, онда бұл **интерполяция** деп аталады, ал егер де осы аралықтан тыс аймақтарда ізделетін болса, онда бұл **экстраполяция** деп аталады.

ПОЛИНОМДЫҚ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.

Лагранждың интерполяциялау көпмүшесі.

$f(x)$ функциясы n ретті полиномдар арқылы аппроксимацияланады деп есептейік.

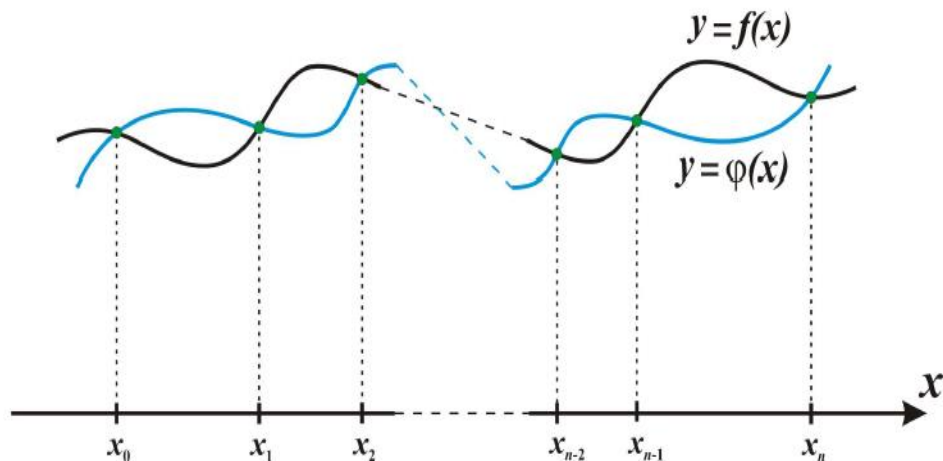
Айталық, $f(x)$ функциясының мәндері $x_0, x_1, \dots, x_n$ нүктелерінде $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ (x_i $i = 1, n -$ түйіндерінде) берілген болсын. Яғни $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында кесте ретінде берілген.

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

$\varphi(x)$ функциясы берілген $f(x)$ – функциясы үшін **интерполяциялау функциясы** болып табылады егер $[a, b]$ аралығындағы $x_0, x_1, \dots, x_n$ – түйіндері үшін $\varphi(x)$ функциясының мәндері $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$, $f(x)$ функциясының мәндерімен $y_0, y_1, \dots, y_n$ дәл (тең) келетін болса. Яғни түйіндер үшін

$\varphi(x_0) = y_0$
$\varphi(x_1) = y_1$
...
$\varphi(x_n) = y_n$

интерполяциялаудың геометриялық мағынасы $\varphi(x)$ функциясының графигі $f(x)$ функциясының графигімен кем дегенде $n + 1$ берілген нүктелерінде қиылысатынын білдіреді.



Сонымен, біз $\varphi(x)$ функциясын төмендегі шарттарды қанағаттандыратындай n –ші ретті $L_n(x)$ – көпмүшесі ретінде іздейміз.

$$\varphi(x) = L_n(x_k) \quad \text{где } (k = 0, 1, \dots, n)$$

Алайда, біз аппроксимациялау жасап отырғандықтан мына шартта орындалады:

$$f(x_k) = L_n(x_k) \quad \text{где } (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

Математикалық талдау курсыңда (1) шартты қанағаттандыратын $L_n(x_k)$ көпмүшесі жалғыз екендігі көрсетілген болатын.

Алдымен $x_i \neq x_k$ нүктелерінде нөлге тең болатын, ал x_k нүктесінде бірге тең n – ретті $Q_{n,k}(x)$ деген алгебралық полиномды іздеп табайық. $Q_{n,k}(x)$ – функциясының түрі мынадай болатыны көрініп тұр

$$Q_{n,k}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

Мұндағы A мына шарт арқылы табылады:

$$1 = Q_{n,k}(x_k) = A \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)$$

бұдан

$$A = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)^{-1}$$

Кронекер символын еңгізсек

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}$$

олай болса

$$Q_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}$$

Осылайша, қойылған мәселені мына көпмүше арқылы шешуге болады

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n Q_{n,k}(x) f(x_k)$$

Бұл көпмүшені **Лагранждың интерполяциялау көпмүшесі** деп атайды. Ашып жазсақ:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i$$

Мысал ретінде бірінші және екінші ретті Лагранждың интерполяциялау көпмүшесін қарастырайық.

$n = 1$ үшін интерполяцияланатын $f(x)$ функциясы туралы ақпарат екі нүктеде шоғырланған: (x_0, y_0) және (x_1, y_1) . Бұл жағдайда Лагранж көпмүшесі келесі түрде жазылады:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1$$

$n = 2$ үшін үш нүкте арқылы жазылады

x	x_0	x_1	x_n
y	y_0	y_1	y_n

Бұл жағдайда Лагранж көпмүшесі келесі түрде жазылады:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Сонымен, мына түрдегі жуықтаулар

$$f(x) \approx L_1(x) \text{ и } f(x) \approx L_2(x)$$

сәйкесінше сызықтық және квадраттық интерполяция формулалары деп аталады.

Мысал.1.

Берілгені: $f(x) = x^2 - 3$, $x \in [2,6]$ $N = 5$ – түйіндер саны. Функцияның мәнін интерполяция түйіндерімен сәйкес келмейтін нүктелерде, атап айтқанда $x = 2.6$ нүктесінде бірінші ретті Лагранж полиномын пайдаланып табу керек.

Шешім. $f(x)$ функциясын кестеде келтірейік

$$h = \frac{b - a}{N - 1} = \frac{4 - 2}{5 - 1} = 0.5.$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	2	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.0	3.25	6.0	9.25	13.0

Берілген нүкте $x = 2,6 \in [x_1, x_2]$ үшін біз бірінші ретгі Лагранж полиномын қолданайық

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2$$

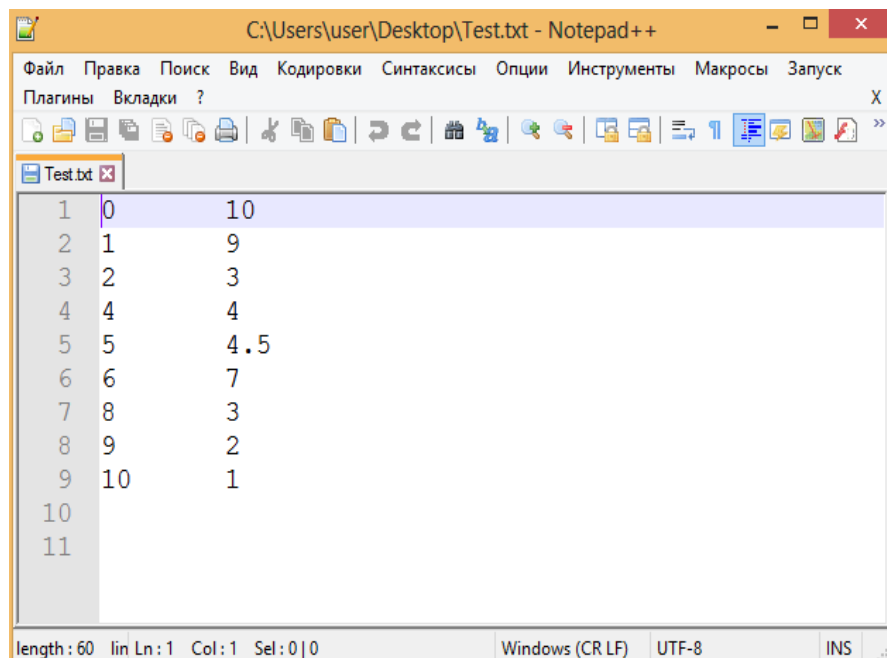
Яғни

$$\varphi(2.6) = \frac{2.6 - 3}{2.5 - 3.0} 3.25 + \frac{2.6 - 2.5}{3.0 - 2.5} 6 = 3.8$$

Ал функцияның осы нүктедегі нақты мәні $f(2.6) = 3.76$.

Мысал.2.

Компьютерде ақпаратпен толтырылған файл бар. Ақпараттар екі бағанда жазылған және функцияның түйіндердегі мәндері болып табылады.



0	10
1	9
2	3
4	4
5	4.5
6	7
8	3
9	2
10	1

Осы файлды оқитын программаны жазыңыз және клавиатура арқылы еңгізілетін x мәні үшін $f(x)$ функцияларының мәндері сызықты интерполяцияланған Лагранж көпмүшесі арқылы консольге шығарылуы тиіс.

C# бағдарламалау тілінде жүзеге асыруды қарастырайық.

Есептің с# тіліндегі коды.

```
class Program
{
    public static float Linear(float x1, float y1, float x2, float y2, float x)
    {
        if (x == x1) return y1;
        if (x == x2) return y2;

        return ((x - x2) / (x1 - x2)) * y1 + ((x - x1) / (x2 - x1)) * y2;
    }

    public static void Main(string[] args)
    {
        string path = @"D:\Test.txt";
        List<float> x = new List<float>();
        List<float> y = new List<float>();

        try
        {
            using (StreamReader s = new StreamReader(path))
            {
                string Line;
                while ((Line = s.ReadLine()) != null)
                {
                    string[] data = Line.Split(' ', '\t');
                    Console.WriteLine(data[0] + " " + data[1]);
                    x.Add(float.Parse(data[0]));
                    y.Add(float.Parse(data[1]));
                }
            }
            if (x.Count != y.Count || x.Count < 2)
                throw new Exception();
        } catch (Exception e) {
            Console.WriteLine("Ошибка при попытке прочитать файл!");
            Console.ReadKey(); return;
        }

        try
        {
            Console.Write("x = ");
            float px = float.Parse(Console.ReadLine());

            for (int i = 0; i < x.Count-1; i++)
            {
                if ((x[i] <= x) && (x[i + 1] >= px))
                {
                    float y = Linear(x[i], y[i], x[i + 1], y[i + 1], px);
                    Console.WriteLine("y = " + y);
                    Console.ReadKey(); return;
                }
            }
            Console.WriteLine("x вне интервала!");
        }
        catch (Exception){
            Console.WriteLine("Не предвиденная ошибка!");
            Console.ReadKey();
        }
    }
}
```

Қосымша материал.

С# арқылы файлды оқу.

Келесі мысалда консольдік программада синхронды оқу әрекеті көрсетілген. Бұл мысалда файлды оқу ағыны арқылы ашады, файл ішіндегі ақпарат string типтес айнымалыға көшіріледі және консольға басып шығарады.

Назар аударыңыз!

Мысалда **TestFile.txt** деген файл проекттің папкасында орналасқан деп есептелінеді.

Пример.

```
using System;
using System.IO;

class Program
{
    public static void Main()
    {
        try
        {
            // Open the text file using a stream reader.
            using (var sr = new StreamReader("TestFile.txt"))
            {
                //Read the stream as a string, and write the string to the console.
                Console.WriteLine(sr.ReadToEnd());
            }
        }
        catch (IOException e)
        {
            Console.WriteLine("The file could not be read:");
            Console.WriteLine(e.Message);
        }
    }
}
```

№5 лаборатория жұмысы.

1. Консоль арқылы $y = f(x)$ функциясының он нүктесін еңгізіңіз. Содан сон консоль арқылы кез келген x – ті еңгізіп, интерполяциаланған функция мәнін табыңыз. Нәтижені консольге шығарыңыз.(Интерполяция үшін екінші ретті Лагранж көпмүшесін қарастырыңыз).